LOS CUADRADOS MÁGICOS MATEMÁTICOS EN AL-ANDALUS. EL TRATADO DE AZARQUIEL

MATHEMATICAL MAGIC SQUARES IN AL-ANDALUS: AZARQUIEL'S TREATISE

MERCÈ COMES
ROSA COMES

Universidad de Barcelona

El artículo estudia la presencia de los cuadrados mágicos matemáticos en al-Andalus. Después de un repaso introductorio a la historia de dichos cuadrados mágicos, al problema de su origen y a su desarrollo en el oriente islámico, se examinan los métodos de construcción de los cuadrados talismánicos que aparecen en dos manuscritos del tratado de Azarquel, el único sobre este tema conocido en al-Andalus, así como su recepción en Europa.

Palabras clave: cuadrados mágicos; al-Andalus; Azarquel; magia talismánica.

This paper focuses on the presence of mathematical magic squares in al-Andalus. After an introductory review on the history of magic squares, the problem of their origins and their development in Eastern Islam, the methods of construction of the talismanic squares appearing in two manuscripts of Azarquel's treatise, the only one on this subject known in al-Andalus, as well as their reception in Europe are examined.

Key words: Magic squares; al-Andalus; Azarquel; Talismanic magic.

Introducción

Este artículo tratará exclusivamente de los cuadrados mágicos matemáticos en al-Andalus, es decir de aquellos cuyas casillas contienen una serie de números naturales consecutivos, empezando por el 1, que mantienen entre sí una relación matemática, excluyendo, por lo tanto, los cuadrados con letras o números representando palabras que no guardan las proporciones matemáticas exigidas.

No disponemos de información fiable sobre los orígenes de estos cuadrados mágicos en al-Andalus, ni en el mundo islámico en general. Ni siquiera el gran esfuerzo investigador que les ha dedicado Jacques Sesiano permite ofrecer alguna certidumbre al respecto. Sesiano propone algunas hipótesis, entre ellas, la posibilidad de que existiera una cierta conexión con la introducción del juego del ajedrez en Per-

sia, lo que explicaría el uso de ciertos movimientos de las piezas del ajedrez, especialmente el caballo, el alfil y la reina, en la construcción de algunos cuadrados ¹.

Lo que sí está claro es que, en sus inicios, la ciencia de los cuadrados mágicos, tal como la encontramos en los documentos islámicos, ofrecía una vertiente puramente matemática y así lo demuestran los manuscritos más antiguos encontrados. También el nombre árabe con el que eran designados, *wafq al-a'dād* o *al-awfāq al-'adadiyya* (disposición armónica de los números) y el de su estudio *hisāb al-wafq* o *al-wifq* ² (cálculo de la disposición armónica), apuntan en esta misma dirección.

Según Sesiano, la conexión de estos cuadrados matemáticos con la magia y la influencia de los planetas no solamente sería más tardía sino que se trataría de la única tradición que se transmitiría a la Europa latina donde, efectivamente, no encontraremos ningún ejemplo de la tradición matemática. Esto habría dado pie a que hoy se les conozca como «cuadrados mágicos» ³. Sin embargo, aunque efectivamente la tradición que llegará a la Europa latina será la talismánica de Azarquiel, no debemos olvidar que fuentes anteriores, como las *Rasā'il* de los Ijwān al-Šafā', ya atribuyen propiedades mágicas a los cuadrados matemáticos, combinados con ciertos datos astrológico-planetarios, que coinciden con las que ofrecerán los autores que relacionan directamente cada uno de los cuadrados con un planeta en concreto ⁴.

En líneas generales, cabe decir que en el mundo islámico la ciencia de los cuadrados mágicos tiene sus inicios en el siglo IX, se desarrolla entre los siglos X y XI, ofrece su máximo esplendor en el XII y comienza a declinar en el XIII. A partir de este momento su uso se relaciona cada vez más con la magia y se vuelve más popular ⁵. En consecuencia, comienzan a escasear los autores que conocen los distintos métodos de construcción y son capaces de desarrollar tratados mate-

¹ Sesiano, J., "Construction of Magic Squares Using the Knight's Move in Islamic Mathematics", *Archives for the History of Exact Sciences*, 58 (2003), 1-20.

² Souissi, M., *La langue des mathématiques en arabe*, Túnez, 1968, 353.

³ Sesiano, J., "Magic Squares for Daily Life", en Ch. Burnett *et alii* (eds.), *Studies in the History of Exact Sciences in Honour of David Pingree*, Leiden-Boston, 2004, 715-734.

⁴ *Rasā'il Ijwān al-Šafā'*, ed. Beirut, s.f., 1, 109-113.

⁵ Ibn Jaldūn en la *Muqaddima*, dedica un capítulo a la magia y los talismanes, donde se mencionan cuadrados de letras y números. Ver Rosenthal, F. (trad.), *The Muqaddimah: an Introduction to History*, Princeton, 1958, III, 156-227.

máticos al respecto, pues les basta con copiar los cuadrados, previamente atribuidos a un planeta, e indicar las posibles utilidades mágicas. Es por ello que prácticamente nunca aparece junto al cuadrado la descripción del procedimiento empleado en su construcción y que los diferentes manuscritos de una misma obra ofrecen cuadrados de distinta procedencia, a menudo extremadamente corruptos.

Definición del cuadrado mágico desde el punto de vista matemático⁶

Una breve definición del cuadrado mágico y una descripción de su tipología nos permitirán identificar los cuadrados andalusíes.

En términos generales, se trata de una construcción formada por un cuadrado dividido en un número igual de casillas por lado, que contienen números naturales consecutivos, comenzando por el 1, ordenados de tal forma que la suma de los números que aparecen en las casillas de cada una de las líneas horizontales es constante e igual a la suma de las casillas verticales, así como a la de las dos diagonales principales. Dicha suma recibe el nombre de suma mágica o constante mágica y se representa habitualmente por M_n . Los cuadrados mágicos se distinguen por su número de orden (n), que viene dado por el número de casillas por lado. Así, un cuadrado que contiene 3 casillas por lado será un cuadrado de orden 3, uno que contenga cuatro casillas será de orden 4, etc.⁷ Generalmente se emplean los primeros números enteros que corresponden a n^2 , siendo la suma de estos números: $n^2 (n^2 + 1) / 2$. La suma de todas las filas, todas las columnas y las dos diagonales principales será: $M_n = n (n^2 + 1) / 2$.

⁶ J. Sesiano ofrece una descripción detallada en la mayoría de sus publicaciones sobre el tema. Véase muy especialmente los prólogos de *Un traité médiéval sur les carrés magiques de l'arrangement harmonieux des nombres*, Lausanne, 1996 y *Les carrés magiques dans les pays islamiques*, Lausanne, 2004.

⁷ El cuadrado de orden 3 es el mínimo posible, puesto que un cuadrado de orden 2 no es factible ya que para que se cumpliera la condición principal, según la cual todas las filas, columnas y diagonales deben sumar lo mismo, todos sus números deberían ser iguales, lo que invalida la condición indispensable de que todos los números sean consecutivos y, por lo tanto, diferentes.

Tipos de cuadrados

De forma muy general y siguiendo a Sesiano, podemos dividir los cuadrados en tres categorías según el orden al que pertenezcan.

a) Impares: n es impar ($n = 2k+1$), donde n es el número de casillas por lado y k cualquier número natural. Por ejemplo 3, 5, 7, 9, etc.

b) Parmente pares: n es par y divisible por 4 ($n = 4k$), por ejemplo 4, 8, 12, etc.

c) Imparmente pares: n es par y divisible únicamente por 2, por lo que se refiere a los números pares, siendo el resultado de esta división impar ($n = 2(2k+1)$), por ejemplo 6, 10, 14, etc.

Si atendemos al tipo, que implica la adición de condiciones complementarias que se reflejan a menudo en los métodos de construcción, podemos dividirlos en:

1) De magia simple: los que únicamente cumplen con los requisitos esenciales.

2) Con bordes: aquellos en los que aunque se vayan suprimiendo los sucesivos bordes siempre queda en el interior un cuadrado mágico.

3) Pandiagonales: los cuadrados en los cuales, además de ser mágicas las sumas de sus diagonales principales, lo son también las sumas de las diagonales parciales (paralelas a una diagonal principal) complementarias.

4) Compuestos o compartimentados: es decir, que se componen de una serie de compartimentos cada uno de los cuales es, en sí mismo, un cuadrado mágico.

Existen también varios métodos de construcción que no implican cambio de tipo, como por ejemplo:

i) El método de las diagonales complementarias, que se basa en llenar mediante números consecutivos y en operaciones sucesivas, primero la mitad superior y luego la inferior (o viceversa) de las casillas de las diagonales complementarias paralelas a una de las principales.

ii) El método del diamante o cuadrado oblicuo, consistente en la inclusión en el cuadrado a completar de un cuadrado oblicuo, que se rellena en primer lugar, generalmente con los números impares. Mediante este método se obtiene un cuadrado mágico similar al del método anterior ⁸.

⁸ Los cuadrados contruidos con el método del cuadrado oblicuo presentan la particularidad de que la cifra central es igual a $(n^2 + 1)/2$ (n = número de orden); mientras que

iii) El método de puntuación: que es un sistema pensado para completar los cuadrados de orden parmente par, especialmente el de orden 4, y que consiste en marcar con puntos las diagonales principales y a partir de ahí, llenar con números consecutivos en dos operaciones sucesivas, primero las casillas de las diagonales principales, partiendo del cuadrado superior derecho y en dirección sinistrorsa, es decir de derecha a izquierda; a continuación se llenan las casillas que han quedado en blanco, partiendo del cuadrado inferior izquierdo y en dirección dextrorsa (de izquierda a derecha). Este método fue creado en principio para el cuadrado de orden 4 pero se adaptó con facilidad a los otros cuadrados parmente pares, como los de orden 8. También los cuadrados de orden imparmente par, como los de orden 6, se pueden completar con una adaptación de este método⁹, aunque dichos cuadrados fueron los más difíciles de sistematizar, puesto que no admiten la aplicación directa de los métodos que funcionan sin problema en los otros casos (impares y parmente pares)¹⁰.

iiii) El método del salto de caballo, que implica, como su nombre indica, la distribución de los números en las distintas casillas mediante el movimiento de esta pieza del ajedrez y el salto de una casilla, o bien a inicio de columna o de fila, cuando la casilla a completar está ya ocupada por un número anterior.

Asimismo, podemos hablar de transformaciones de los cuadrados, lo que implica rotaciones, inversiones, etc.

la cifra que le antecede en la columna central es igual a n^2 y la que le sigue, 1. Aparte de en los cuadrados de 3 de los manuscritos de Azarquiel de Viena (V) y Londres (B) identificados en las notas 43 y 44 y que como veremos más adelante no son representativos, encontramos también esta característica en los cuadrados de 5 y 9 (B) y en la tradición posterior, especialmente en *Agrippa*.

⁹ Para una descripción del método usado en el cuadrado de 6 (V), cf. Nowotny, K.A., "The Construction of Certain Seals and Characters in the Work of *Agrippa* of Nettesheim", *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, 12 (1949), 46-57, 51 y Sesiano, J., "Un traité persan sur les carrés magiques", *Ayene-ye Miras*, ns, v. 3, n.º 1 (28), 2005, 69-116, esp. 93-95, figs. 25-26.

¹⁰ Savage, D.F., "Oddly-Even Magic Squares", en W.S. Andrews *et alii*, *Magic Squares and Cubes*, Nueva York, 1960, 217-224, esp. 217.

Relación de los cuadrados con los planetas

La relación de los cuadrados mágicos, en concreto de los siete primeros, es decir del orden 3 al 9, con las virtudes mágicas de los siete planetas conocidos desde la antigüedad (aquellos observables a simple vista), está documentada en épocas muy diversas. Ya desde tiempos muy antiguos, los espíritus de los planetas se invocaban para suplicar ciertos favores, sobre todo en la magia que emplea talismanes, contruidos mediante ciertos rituales y bajo condiciones astrales determinadas, con el fin de modificar de alguna manera el destino, en contraposición a la magia adivinatoria, que pretende averiguar el futuro ¹¹. La invocación a los planetas en el contexto de la magia talismánica era una costumbre habitual entre los sabeos ¹² y quizás no deba sorprendernos que los primeros textos matemáticos sobre cuadrados mágicos procedieran de este entorno.

Por otra parte, mientras que en Oriente se desarrolló una importante labor matemática, diseñándose métodos cada vez más sofisticados de construcción, en al-Andalus no conocemos ningún tratado de este tipo. El único tratado andalusí sobre cuadrados mágicos, obra de un científico precisamente, trata únicamente del uso de estos cuadrados relacionándolos con los planetas con el fin de obtener ciertos beneficios mediante algunas de sus virtudes mágicas compartidas.

Precedentes históricos de los cuadrados mágicos

Desde la antigüedad y en gran diversidad de culturas se consideró que la combinación en condiciones específicas de letras y números formando cuadrados tenía unas propiedades mágicas de las que carecían las mismas letras y números considerados aisladamente o combinados de manera distinta.

¹¹ Ver al respecto la introducción de Savage-Smith, E., *Magic and Divination in Early Islam*, Aldershot, 2003, xiii-li.

¹² Con respecto al papel jugado por los sabeos de Harran en la transmisión de ciertos ritos mágicos, ver el artículo “Šābi’a” de Toufic Fahd en *EP*, VIII, 675-678; Peters, F.E., “Hermes and Ḥarrān. The Roots of Arabic-Islamic Occultism”, en Savage-Smith, *Magic and Divination in Early Islam*, 55-86 y Green, T.M., *The City of the Moon God. Religious Traditions of Harran*, Leiden, 1992.

La combinación de los números naturales con propiedades parecidas es también muy antigua y de hecho el primer cuadrado que encontramos es el de orden 3, conocido en el mundo musulmán con el término *budūh*, formado con las letras que corresponden a los números de las cuatro esquinas de este cuadrado (fig. 1), el más sencillo posible puesto que admite una única combinación con el 5 en el centro, aunque puede mostrarse en rotación o inversión ¹³. Muestra de este cuadrado la encontramos ya, por ejemplo, en la antigua China. No nos consta que cuadrados de orden superior hubieran aparecido en China antes del siglo XIII, momento en que el contacto con las ciencias exactas árabes, especialmente la astronomía y las matemáticas, está ya bien documentado.

No se tienen noticias concretas de que los cuadrados mágicos fueran conocidos en la Grecia antigua, aunque ciertos testimonios árabes evocan una teórica procedencia griega. Este origen, posiblemente mítico y por otra parte habitual en distintos aspectos del conocimiento, muy probablemente tendría por objetivo, como bien señala Sesiano, la justificación que dicha procedencia otorgaría a esta ciencia ¹⁴, o simplemente se argüiría por desconocimiento, basándose en la suposición de que todo aquello que tenía implicaciones matemáticas debía provenir de Grecia. Hay que destacar que estas referencias se encuentran en fuentes tardías y de escasa solvencia científica, como puede ser al-Qazwīnī (s. XIII), quien atribuye su invención a Arquímedes. Los bizantinos sí les dedicaron un cierto interés, pero esto ocurriría muy a principios del XIV, de la mano de Manuel Moschopoulos, quien muestra poca originalidad y su tratado parece, según los estudios más recientes, derivar de algún antecedente árabe o persa, ya que los cuadrados que reproduce eran ya bien conocidos del mundo musulmán por lo menos desde el siglo XI ¹⁵.

¹³ El cuadrado de orden 3 no es representativo ya que las 8 apariencias que puede mostrar son el resultado de las 3 rotaciones y 4 inversiones posibles de un mismo cuadrado, independientemente del método de construcción empleado.

¹⁴ Sobre la mitología alrededor del origen de los cuadrados mágicos, ver Sesiano, *Les carrés magiques dans les pays islamiques*, 8 y 266-268. En cuanto a su posible conocimiento en Grecia, ver Vinet, N., "Un carré magique pythagoricien? Jamblique précurseur des témoins arabo-byzantins", *Archive for the History of Exact Sciences*, 59 (2005), 545-562.

¹⁵ Sesiano, J., "Les carrés magiques de Manuel Moschopoulos", *Archive for the History of Exact Sciences*, 53 (1998), 377-397.

Aunque en la India aparecerán también durante el XIII, sin que se tengan noticias anteriores al respecto, cabe destacar que alrededor del siglo VII, Persia importará de la India el juego del ajedrez, en el que se basa la construcción primitiva de los cuadrados. Sesiano apunta la posibilidad de que éste fuera el lugar donde se originaran, basándose en el hecho de que los primeros autores de tratados del género en lengua árabe y la mayoría de los posteriores eran de origen persa ¹⁶.

Desarrollo en el Oriente islámico

Como ya hemos visto, los cuadrados mágicos se desarrollaron básicamente en los países del Oriente islámico donde, entre los siglos X y XVIII, autores de todo tipo dedicaron su atención a este tema. Aunque se tienen noticias de textos sobre cuadrados mágicos del siglo IX, no se ha conservado ninguno. En un texto árabe de Yābir b. Ḥayyān (s. VIII) se describe el uso como amuleto de un cuadrado de orden 3 ¹⁷, aunque parece que la transmisión dataría del siglo IX o X. Sin embargo, el tratado más antiguo sobre el tema que mencionan los biógrafos árabes se debería a Tābit b. Qurra, sabeo de Ḥarrān (s. IX), a quien Ibn Abī Uṣaybi'a le atribuye el opúsculo titulado *Risāla fī 'adad al-wafq* ¹⁸. Ahora bien, los primeros tratados de construcción de estos cuadrados que se han conservado datan del siglo X y en ellos se explican los distintos métodos para construir cuadrados de los tipos y órdenes más diversos. El tratado más antiguo es el de Abū l-Wafā' al-Būzḡānī (X) ¹⁹. Medio siglo más tarde también dedicará su atención al género Abū 'Alī l-Ḥasan b. al-Ḥayṭam (Alhazen) (965-1040), cuyas descripciones nos han sido transmitidas por un tratado anónimo del siglo XII ²⁰.

¹⁶ Sesiano, J., "La science des carrés magiques en Iran", en D.N. Pourjavady y Ž. Vesel (eds.), *Sciences, techniques et instruments dans le monde iranien (X^e-XIX^e siècle)*, Teherán (2004), 165-181, esp. 167-8.

¹⁷ Ahrens, W., "Studien über die magischen Quadrate der Araber", *Der Islam*, 7 (1917), 186-250 e *idem*, "Magische Quadrate und Planetenamulette", *Naturwissenschaften Wochenschrift*, 19 (1920), 465-475.

¹⁸ Ibn Abī Uṣaybi'a, *'Uyūn al-anbā' fī Ṭabaqāt al-aṭibbā'*, Beirut, 1957, 2, 193-201.

¹⁹ Sesiano, J., "Le traité d'Abū l-Wafā' sur les carrés magiques", *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, 12 (1998), 121-244.

²⁰ Ms. Fatih 3439. Ver al respecto Sesiano, J., "Herstellungsverfahren magischer Quadrate aus islamischer Zeit (I)", *Sudhoffs Archiv. Zeitschrift für Wissenschaftsgeschichte*, 64 (1980), 187-196, esp. 187, n.º 3.

Los siglos XI y XII corresponderán a la época de oro de los cuadrados mágicos en los países musulmanes. En este momento, se llegará a la mayor sofisticación en la descripción y variedad de los métodos de construcción. Hasta entonces, la finalidad era predominantemente matemática, su estudio pertenecía a la teoría del número, al mismo nivel que el estudio de los números amigos. Sin embargo, a partir del XII el elemento mágico, que no tuvo un papel esencial en sus orígenes, irá ganando importancia ²¹.

También, como hemos visto, encontramos la serie de siete cuadrados en las *Rasā'il* de los Ijwān al-Ṣafā' ²². A partir de este momento destacarán una serie de matemáticos persas, como Abū Ḥātim Muẓaffar Asfīzārī, Ḥamāl al-Zamān 'Abd al-Ḥabbār Jaraqī, ambos de finales del XI principios del XII o ya entrado el siglo XIII, 'Abd al-Wahhāb b. Ibrāhīm Zanānī, que escribirán tratados al respecto, aportando innovaciones de interés. Es en este momento cuando empieza a perderse originalidad y, tal como ocurre en otros ámbitos de la ciencia, se desarrollan las compilaciones y encontramos tratados en otras zonas, como por ejemplo Egipto, donde Muḥammad Ṣabrāmallisī compuso un tratado, alrededor de 1600, en el que el autor discute otras figuras mágicas, como círculos con cuadrados inscritos, cuyo valor se inscribe más en el campo de los amuletos que en el matemático ²³. El tratado más tardío, estudiado también por Sesiano, es del sudanés Muḥammad al-Fulānī l-Kiṣnāwī, del XVIII ²⁴, quien vivió durante cierto tiempo en El Cairo, donde murió.

²¹ Ver al respecto Savage-Smith, E., "Magic and Islam", en F. Madison y E. Savage-Smith (eds.), *Science, Tools & Magic*, Londres-Oxford, 1997.

²² En muchos manuscritos de las *Rasā'il* faltan algunos de los cuadrados. Por ejemplo, en el ms. Árabe 2304 de la Biblioteca Nacional de París (antes 1005), encontramos llenos los cuadrados de orden 3, 4, 5 y 6, mientras que los de orden 7, 8 y 9 aparecen vacíos. Ver traducción parcial de Dieterici, F., *Die Propädeutic der Araber in zehnte Jahrhundert*, Berlín, 1865. Sin embargo, la edición de El Cairo de 1928 presenta la totalidad de los cuadrados, lo mismo que la edición de Beirut sin fecha que se ha utilizado en este artículo. Ver también Hermelink, H., "Die ältesten magischen Quadrate höherer Ordnung und ihre Bildungsweise", *Sudhoffs Archiv für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften*, XLII, 3 (1958), 199-217.

²³ Sesiano, "Construction of Magic Squares", 1-20.

²⁴ *Idem*, "Quelques méthodes arabes de construction des carrés magiques impairs", *Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles*, 83 (1994), 51-76.

Desarrollo en el Occidente islámico. Al-Andalus y Norte de África

Vista la panorámica general de la atención que se dedicó a estos cuadrados mágicos en el Oriente islámico, cabe centrarse ahora en lo que ocurrió en el Occidente musulmán, donde no despertaron, ni por asomo, el mismo interés, especialmente desde el punto de vista matemático, dominante en Oriente. Hay que señalar únicamente dos casos destacables, el de Abū Ishāq al-Zarqālluh, nuestro Azarquiel, en al-Andalus, siglo XI, y el del argelino Aḥmad al-Būnī a principios del XIII.

Tenemos referencias varias a autores andalusíes que trataron el tema, directa o indirectamente, pero no se conserva su obra. Conocemos un cuadrado mágico, de orden 5, que aparece en un manuscrito de la *Geografía* de al-Zuhrī (s. XII), aunque al parecer no habría formado parte del original, puesto que no se menciona en la edición de los demás manuscritos y el texto de la página anterior (69) continúa sin interrupción en la página posterior (71). Junto al cuadrado aparece una breve descripción sobre los cuadrados mágicos. El cuadrado contiene muchos errores, además de faltarle los números 8, 18 y 19, le sobra el 26 y muestra el 13 y el 14 repetidos²⁵. Por otra parte, no podemos descartar la posibilidad de que otro andalusí más tardío, el matemático Yaʿīsh b. Ibrāhīm al-Umawī al-Andalusī (s. XIV), fuera también autor de un opúsculo sobre cuadrados mágicos. Después de dos tratados aritméticos de este autor, en un manuscrito que se conserva en la British Library²⁶ aparece un método de construcción de cuadrados mágicos de orden impar, sin atribución de autor, en el que se menciona a al-Būnī²⁷.

La tradición continuará también en el norte de África donde, ya entrado el siglo XV, encontramos a Naṣīr al-Dīn Muḥammad b. Muḥammad b. Qūqamāz al-Buktumrī al-Qāhirī al-Ḥanafī, quien dedica

²⁵ Manuscrito SM288 de la colección de manuscritos orientales de la Houghton Library de la Universidad de Harvard. Ver Tolmacheva, M., "Al-Zuhrī's *Geography* in the Houghton Collection", *Al-Qanṭara*, VI (1985), 507-516. La posible explicación que da la autora del artículo respecto a la inclusión del cuadrado es inadecuada, entre otros motivos porque la constante mágica del cuadrado de 5 es 65 y no 70. Este cuadrado está siendo estudiado por las autoras.

²⁶ MS. Stowe Or. 10 (OMP 7554).

²⁷ Saidan, A.I., "Magic Squares in an Arabic Manuscript", *Journal for the History of Arabic Science*, 4 (1980), 87-89.

también una obra a esta temática, el *Fath al-jallāq fī 'ilm al-hurūf wa-l-awfāq*. Sin embargo, el autor más importante de la zona será Muḥyī l-Dīn Abū l-‘Abbās Aḥmad al-Būnī (m. 622/1225), nacido y muerto en Būna, la actual Annaba en Argelia, aunque vivió y trabajó en Egipto, a quien se le atribuyen un gran número de obras conteniendo cuadrados mágicos²⁸. Al-Būnī escribió en el *Kitāb Šams al-ma‘ārif al-kubrā wa-laṭā‘if al-‘awārif*²⁹ un capítulo sobre el conocimiento de las predisposiciones del individuo mediante el uso de los cuadrados numéricos y el modo de obtener la ayuda de los cuerpos celestes. Sin embargo, aun siendo también su interés más talismánico que matemático, y teniendo en cuenta que en algunas de sus obras también relaciona los siete primeros cuadrados con los planetas, al-Būnī, a diferencia de Azarquiel, explica dos métodos de construcción de cuadrados con bordes³⁰. Analizando el vocabulario que emplea a menudo para designar las piezas de ajedrez (*šāh, roj, ferzāneh*), a través de cuyo movimiento se irán construyendo algunos cuadrados, resulta evidente que estas descripciones tienen un claro origen persa. Otras obras en las que trata una temática similar son *al-Durr al-manzūm* y el *Šarḥ ism Allāh al-a‘zam*. Sus antecedentes se remontan al oriente islámico, y, como en el caso de los Ijwān al-Šafā’, parecen estar también relacionados con los sabeos. Nos constan los nombres de Šihāb al-Dīn Aḥmad b. Yūsuf al-Būnī, autor del *Baḥr al-wuqūf fī 'ilm al-awqāf wa-l-hurūf*, de Abū l-Ḥasan b. ‘Alīb. Ibrāhīm b. Muḥammad al-Ḥarrānī, quien vivió en Ḥama, donde murió en el año 538, autor del *Kitāb al-Lam‘a* y del *Kitāb Šams maṭālī‘ al-qulūb*, y de quien sería discípulo directo Aḥmad b. ‘Alī l-Būnī.

²⁸ Sobre los cuadrados mágicos y la magia en al-Būnī, ver Ahrens, W., “Die magischen Quadrate al-Bunis [The magic squares of al-Buni]”, *Der Islam*, 12 (1992), 157-177; Pielow, D.A.M., *Die Quellen der Weisheit. Die arabische Magie im Spiegel des “Uṣūl al-ḥikma” von Aḥmad ‘Alī l-Būnī*, Hildesheim, 1995; Lory, P., “La magie des lettres dans le *Shams al-ma‘ārif* d’al-Būnī”, *Bulletin d’études orientales*, 39-40 (1987-1988), 97-111 y Hermelink, “Die ältesten magischen Quadrate”.

²⁹ Edición de El Cairo (s.f.).

³⁰ Carra de Vaux, B., “Une solution arabe du problème des carrés magiques”, *Revue d’histoire des sciences*, 1 (1947), 206-212.

Posible relación de los cuadrados mágicos con las monedas almohades

Uno de los rasgos sobresalientes de las monedas de plata almohades (s. XII y XIII) es su forma cuadrada, y de las de oro, su cuadrado inscrito en un círculo. Según M. Vega y S. Peña, esta forma cuadrada estaría relacionada con el valor simbólico que se le daba en el sistema de ideas religiosas islámicas como representación del universo de lo contingente en la cosmología sagrada ³¹. Por otra parte conocemos un amuleto cuadrado de plata tipo almohade con un cuadrado mágico de orden 4 inscrito en cada cara, con distinta notación numérica (indoarábica oriental ³² y *abḡad*), que se conserva en el Museo Arqueológico Nacional de Madrid (MAN) ³³. Maribel Fierro plantea la hipótesis de una posible relación entre la figura cuadrada de las monedas y los cuadrados mágicos ³⁴. El cuadrado mágico inscrito en el amuleto del MAN, no solamente coincide con el de orden 4 de al-Būnī, tal como apuntan Rodríguez y Kind, sino también con el de los Ijwān al-Ṣafā' y el de Azarquiel de los manuscritos de Viena y Londres, aunque la tradición mágica requiere que el cuadrado de orden 4 se grave sobre estaño, quedando la plata destinada al cuadrado de orden 8. Sin embargo, hay que decir que cuadrados mágicos en medallas, amuletos y sellos se encuentran abundantemente en todas las épocas y en notación alfanumérica de distintas lenguas, incluidos el árabe y el he-

³¹ Vega, M. y Peña, S., "El hallazgo de monedas almohades de Priego de Córdoba: aspectos ideológicos", *Antiquitas*, 15 (2003), 65-71, e *idem*, "El nombre de Priego en una moneda almohade", *Antiquitas*, 17 (2005), 143-7.

³² Según terminología de Kunitzsch, P., *Zur Geschichte der "arabischen" Ziffern*, Bayerische Akademie der Wissenschaften, Munich, 2005, 39, T. 2, donde se muestran las formas medievales de la numeración indoarábica oriental (*Eastern Arabic*), con indicación de las grafías más modernas (*newer forms*) y las de la numeración indoarábica occidental (*Western Arabic*). Ver también Burnett, Ch., "Indian Numerals in the Mediterranean Basin in the Twelfth Century", en Y. Dold-Samplonius *et alii* (eds.), *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*, Stuttgart, 2002, 237-288, esp. las tablas de pp. 265-268.

³³ Rodríguez Lorente, J.J. y Kind, H.D., "Un amuleto arábigo con un cuadrado mágico en el monetario del Museo Arqueológico Nacional de Madrid", *Al-Qanṭara*, XII (1991), 401-414.

³⁴ Fierro, M., "La Magia en al-Andalus", en A. Pérez Jiménez y G. Cruz Andreotti, *Daímon Páredros: Magos y prácticas mágicas en el mundo mediterráneo*, Madrid-Málaga, 2002, 245-273, esp. 272-3.

breo ³⁵, así como formando parte de diversos manuscritos mágicos sin relación directa con el texto en el que se incluyen.

Por lo que respecta a al-Andalus, como ya hemos avanzado, únicamente disponemos del tratado de Azarquiel. Se trata de un pequeño opúsculo, en absoluto comparable con los grandes tratados matemáticos anteriores, puesto que no ofrece ningún tipo de explicación sobre la construcción de los cuadrados. No hay que olvidar que Azarquiel fue un gran astrónomo y constructor de instrumentos pero no era matemático, a diferencia de la mayoría de los autores que dedicaron sus esfuerzos a estos cuadrados. En el tratado de Azarquiel encontramos simplemente los siete cuadrados, de orden 3 a 9, relacionados con los siete planetas. Esta somera presentación viene acompañada por la exposición detallada de las virtudes mágicas de cada uno de ellos.

Es posible que Azarquiel conociera esta tradición de cuadrados mágicos relacionados con los planetas gracias a que en su época se introdujeron en al-Andalus las *Rasā'il* de los Ijwān al-Ṣafā'. García Gómez ³⁶ nos recuerda que la introducción de esta obra en al-Andalus, documentada en las *Ṭabaqāt* de Ṣā'id al-Andalusī, la llevó a cabo al-Kirmānī (m. 1066), matemático y geómetra originario de Córdoba, a su regreso de Oriente ³⁷. Sin embargo, apunta también la posibilidad de que hubiese sido introducida con anterioridad por el matemático Maslama (950-c.1007) a su regreso de tierras orientales, aunque esta referencia no aparezca en las *Ṭabaqāt*, con el argumento de que ya aparecen citados en algunos poemas andalusíes de la época. Probablemente confunda al matemático Abū l-Qāsim Maslama b. Aḥmad b. Qāsim al-Ma'yritī, de quien no se tiene constancia que hubiese viajado a Oriente, con el tradicionista Abū l-Qāsim Maslama b. Qāsim b. Ibrāhīm al-Qurṭubī (906-964), cuyo viaje a tierras de oriente está ampliamente documentado, y es probablemente autor de una versión de las *Rasā'il* ³⁸, así como de la *Rutbat al-ḥakīm* y la *Gāyat al-ḥakīm* (Pi-

³⁵ Ver, por ejemplo, Nowotny, K.A., *Henricus Cornelius Agrippa ab Nettesheym. De Oculta Philosophia*, Graz, 1967, Apéndices V, XI y XIII.

³⁶ García Gómez, E., "Alusiones a los Ijwān al-Ṣafā' en la poesía áraboandaluza", *Al-Andalus*, 4, 2 (1939), 462-466.

³⁷ Ṣā'id al-Andalusī, *Kitāb ṭabaqāt al-umam*, Bū 'Alwān (ed.), Beirut, 1985, 171-172.

³⁸ Gonzalvo, L., "Apunte sobre algunos musulmanes madrileños", en *Homenaje a Don Francisco Codera*, Zaragoza, 1904, 354-355 y Fierro, M., "Bāṭinism in al-Andalus. Maslama b. Qāsim al-Qurṭubī (d. 353/964), author of the *Rutbat al-ḥakīm* and the *Ghāyat al-ḥakīm* (Picatrix)", *Studia Islamica*, 84 (1996), 87-112, esp. 108.

catrux ³⁹). Otro autor andalusí contemporáneo de Maslama al-Qurtubī, que también trató la temática de los talismanes relacionados con los astros, fue Abū ‘Alī b. al-Ḥasan b. al-Ḥātim, aunque en la única obra que le conocemos, traducida en el XV al latín con el título de *De imaginibus caelestibus*, tampoco utiliza los cuadrados mágicos ⁴⁰. De todas maneras, las técnicas de magia talismánica de origen harraniano podrían también haber sido introducidas por Aḥmad y ‘Umar b. Yūnus al-Ḥarrānī, que según Ibn Yūlūl estudiaron en Bagdad con Ṭābit b. Sinān b. Ṭābit b. Qurra al-Ḥarrānī la obra matemático-astronómica de Ṭābit b. Qurra, a quien ya hemos mencionado como uno de los introductores de la magia talismánica de Ḥarrān en el mundo islámico ⁴¹. También pudo influir en nuestro autor el ambiente propicio a la magia de la ciudad de Toledo, donde debían circular libros de distinta índole. Muy pocos años después de la muerte de Azarquiel, a principios del XII, encontramos allí a Adelardo de Bath traduciendo precisamente la obra talismánica de Ṭābit b. Qurra ⁴².

Del tratado de Azarquiel conocemos los siguientes manuscritos: Viena (NW, 1421) ⁴³, Londres (BM, 977 Add. 9599) ⁴⁴ y El Cairo (BN TJ, 423, 3; SH, 124 y DM, 920) ⁴⁵. Actualmente estamos preparando

³⁹ Una argumentación muy convincente de esta atribución ha sido desarrollada por M. Fierro en “Batinism in al-Andalus”.

⁴⁰ Un cuadrado mágico, tipo *buduḥ* en letras hebreas, aparece en la introducción a la versión latina de Guglielmo Raimondo de Moncada (XV), previa a la traducción del texto árabe de Ibn al-Ḥātim. Ver al respecto la edición del texto latino y la traducción del texto árabe en Lippincott, K. y Pingree, D., “Ibn al-Ḥātim on the Talismans of the Lunar Mansions”, *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, 50 (1987), 57-81 e *idem*, “More on Ibn al-Ḥātim”, *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, 51 (1988), 188-190. La edición del texto árabe se publica en este mismo número de *Al-Qanṭara*: Oliveras, M., “El *De imaginibus caelestibus* de Ibn al-Ḥātim”.

⁴¹ Samsó, J., *Las Ciencias de los Antiguos en al-Andalus*, Madrid, 1992, 48.

⁴² Burnett, Ch., “Talismans: Magic as Science? Necromancy among the Seven Liberal Arts”, en *idem*, *Magic and Divination in the Middle Ages. Texts and Techniques in the Islamic and Christian Worlds*, Ashgate, 1996, I, 6.

⁴³ Nationalbibliothek Wien AF 162d (76), Flügel 1421, 1r-11v. Facsímil en Nowotny, *Henricus Cornelius*, Apéndice VIII. Fechado 963/1556.

⁴⁴ British Museum, Londres 977¹⁸ (Add. 9599), fols. 133r-145v.

⁴⁵ King, D.A., *A Survey of the Scientific Manuscripts in the Egyptian National Library*, American Research Center in Egypt / Catalogs, vol. 5, Winona Lake, Indiana, 1986, B87, 50. Con el título *Risāla fī ḥarakāt al-kawākib al-sayyāra wa tadbīri-hā* se encuentra en El Cairo BN TJ (Ṭal‘at maṣāmi‘) 424, 3 (fols. 51v-60v, ca. 1200H), Sh (Ḥurūf wa-awfāq) 124 (10 fols. ca. 1200H) y DM (Dār al-Kutub miqāt) 920 (13 fotografías del Ms. British Library add. 9599). David King señala que los textos de las tres copias son sustancialmente distintos.

la edición, traducción y comentario de este tratado, en base a los manuscritos de Viena (Ms. V) y Londres (Ms. B), ya que ha sido imposible acceder a los de El Cairo, al igual que la de sus derivados latinos, de los que disponemos de abundantes manuscritos.

Una vez estudiado su contenido, se puede ya avanzar, por una parte, que siguiendo una costumbre antigua, Azarquiel ofrece la influencia de cada uno de los siete planetas, Saturno, Júpiter, Marte, Sol, Venus, Mercurio y Luna, en este orden, y la pone en combinación con otros elementos, que actuarán reforzándola o disminuyéndola. Estos elementos pertenecen al mundo animal, vegetal y mineral, y se relacionan con datos calendáricos y astrológico-planetarios, que proporcionarán los momentos propicios o nefastos. Este tipo de combinaciones lo encontramos ya en las *Rasā'il* de los Ijwān al-Şafā' ⁴⁶ y en la *Gāyat al-ḥakīm*, más conocida por su nombre latino de *Picatrix* ⁴⁷, donde se cita a Tābit b. Qurra y a su libro sobre los talismanes ⁴⁸. Todo ello, con la intención de facilitar la construcción de talismanes tanto con fines benéficos como maléficos. Estos talismanes, también siguiendo antiguas tradiciones, se inscribirán en distintos materiales según el planeta con el que se identifiquen, plomo, cobre rojo, cobre amarillo, estaño, oro, plata, así como cerámica, algodón o pieles de animales.

Por otra parte, Azarquiel combina cada uno de estos planetas, siguiendo el orden antes enunciado, con un cuadrado mágico. Así Saturno se corresponderá con el cuadrado de 3, Júpiter con el de 4, Marte con el de 5, el Sol con el de 6, Venus con el de 7, Mercurio con el de 8 y la Luna con el de 9. Algunas de las propiedades descritas por Azarquiel para los cuadrados y sus planetas respectivos las ofrecían ya los Ijwān al-Şafā' y las encontraremos también recogidas por al-Būnī y las versiones latinas que aparecerán a partir del XV, aunque los talismanes propuestos no son siempre los mismos.

Por poner únicamente un ejemplo, tanto al-Būnī ⁴⁹ como Azarquiel y los textos latinos derivados proponen, para ayudar al parto, la utilización de Saturno y el cuadrado de tres. Es curioso constatar aquí

⁴⁶ Marquet, I., "Sabéens et Ikhwān al-şafā'", *Studia Islamica*, 24 (1966), 35-80 y 25 (1966), 77-109.

⁴⁷ Ritter, H. (ed.), Pseudo-Majrīṭī, *Daz Ziel des Weisen. 1. Arabischer Text*, Leipzig, 1933 y Pingree, D., *Picatrix, the Latin Version*, Londres, 1986.

⁴⁸ Burnett, "Talismans", 7.

⁴⁹ Souissi, M., "Ḥisāb al-wafq", *Ḥawaliyyāt al-ŷāmi'a l-tūnisiyya*, 27-43.

que los Ijwān al-Safā' usan también el cuadrado de tres con la misma finalidad, aunque sin relacionarlo con Saturno. Todos ellos sugieren tener en cuenta la Luna para la determinación del momento propicio. Sin embargo, mientras que Azarquiel propone usar un trapo nuevo de algodón y atarlo al costado izquierdo de la mujer ⁵⁰, al-Būnī, siguiendo en parte a los Ijwān, sugiere el uso de tres fragmentos de cerámica nuevos a los que no haya tocado el agua. La diferencia estriba en que los Ijwān proponen dos pedazos de cerámica a los que no haya tocado el agua, en lugar de tres, y se limitan a decir que hay que ponerlos encima de la mujer, mientras que al-Būnī especifica que hay que colocar uno de ellos enfrente de la casa de la mujer y los otros dos sobre sus muslos. El *Picatrix* también menciona el número 15 ⁵¹ en relación a facilitar el parto. Las versiones latinas, por su parte, presentan una combinación de estos elementos. Por una parte recogen la idea de Azarquiel de escribir el cuadrado en un paño de algodón nuevo, y la de al-Būnī de colocarlo sobre los muslos de la mujer, aunque en este caso se trata únicamente del muslo derecho. Ésta debía ser una aplicación bien conocida pues la encontramos descrita en el capítulo nueve del *Sefer Hanisyonot*, atribuido a Abraham ibn Ezra, en el contexto de distintos procedimientos para facilitar el parto. El autor atribuye a Galeno el procedimiento de dibujar el cuadrado de orden tres en un fragmento de cerámica que jamás haya estado en contacto con el agua y ponerlo debajo de las plantas de los pies de la mujer ⁵².

Estudio de los cuadrados mágicos en el manuscrito de Viena (V) de Azarquiel

Los cuadrados que aparecen en este manuscrito parecen ser casi contemporáneos del autor. De hecho, por una parte, sólo los cuadrados más sencillos y con pocas posibilidades combinatorias, como los de orden 3 y 4, tienen su antecedente en aquellos que podemos datar a

⁵⁰ Es curioso que uno de los sentidos del verbo *yasara* sea el de tener un parto fácil.

⁵¹ Hay que recordar que el número 15 corresponde a la suma mágica del cuadrado de orden tres.

⁵² Agradecemos a T. Langermann que nos haya proporcionado información sobre este cuadrado mágico y la referencia del *Sefer Hanisyonot*. *The Book of Medical Experiences attributed to Abraham ibn Ezra*. Edición, traducción y comentario de J.O. Leibowitz y S. Marcus, Jerusalén, 1984, 238-243.

finales del siglo X, como los de los Ijwān al-Şafā' ⁵³ o los descritos por Abū l-Wafā' ⁵⁴ y, por otra, el método empleado para construir el cuadrado «parmente impar» de orden 6 fue descubierto, según J. Sesiano ⁵⁵, en la segunda mitad del siglo XI. Una característica de los cuadrados en este manuscrito es que presentan una casilla vacía, pero a diferencia de los tradicionales, dicha casilla no es la central (*jālī l-wasat*) ⁵⁶ y además el número correspondiente está escrito fuera de las líneas exteriores del cuadrado.

Cuadrados impares de orden 3, 5, 7 y 9

Están en notación indoarábiga oriental y contruidos, en sentido dextrorso, mediante el método de diagonales complementarias, descrito al parecer como un caso particular de cuadrado de magia simple de orden impar en un ms. anónimo del s. XI ⁵⁷. Aunque, de hecho, según Sesiano las figuras correspondientes no se encuentran en el manuscrito y se trataría de adiciones de un lector ⁵⁸.

El cuadrado de orden 3 está testimoniado desde finales del siglo X en los Ijwān al-Şafā' ⁵⁹ y en Abū l-Wafā' ⁶⁰, así como en un tratado anónimo de inicios del siglo XI ⁶¹. Encontramos esta tradición en la Europa Renacentista, en los trabajos del médico y filósofo Cornelio Agrippa (1486-1535) ⁶², así como en los del médico y matemático Girolamo Cardano (1501-1576) ⁶³. El cuadrado del manuscrito V de Azarquiel presenta dos errores ⁶⁴.

⁵³ Ed. Beirut, 109 y 112.

⁵⁴ Sesiano, "Le traité d'Abū l-Wafā'", 141 y 144-145, f. 1 y 5b.

⁵⁵ *Idem*, "Quelques constructions des carrés a magie simple dans les textes arabes", *Actes du 3me Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes, Tipaza 1-3 Décembre 1990*, Argel, 1998, 251-262, esp. 255-256.

⁵⁶ *Idem*, "Quelques méthodes arabes de construction", 51-76, esp. 72-76.

⁵⁷ Sesiano, *Les carrés magiques dans les pays islamiques*, 29-30.

⁵⁸ *Idem*, *Un traité médiéval*, 31-35, n.º 55, fig. 8'.

⁵⁹ Ed. Beirut, 109 y 112.

⁶⁰ Sesiano, "Le traité d'Abū l-Wafā'", 141 y 144-145, figs. 1 y 5b.

⁶¹ *Idem*, *Un traité médiéval*, 27-28, esp. 28, fig. 1.

⁶² Nowotny, "The Construction of Certain Seals", esp. 50, figs. 2-4.

⁶³ Folkerts, M., "Zur Frühgeschichte der magischen Quadrate in Westeuropa", *Sudhoffs Archiv. Zeitschrift für Wissenschaftsgeschichte*, 65 (1981), 313-338, esp. 324-325.

⁶⁴ Los números 3 y 8 están intercambiados, como sucede también en los cuadrados de orden 5 y 6 del mismo manuscrito, lo cual indica que dichos cuadrados fueron copiados muy probablemente de un original en *abyad*.

Figura 1.—ms. V, O.3

٢		٢
٨	٥	٧
٣	١	٤

Figura 2.—ms. V, O.3 corregido ⁶⁵

4	9	2
3	5	7
8	1	6

El cuadrado de orden 5 se inicia en la parte inferior izquierda del cuadrado, lugar poco habitual, y presenta tres errores ⁶⁶.

Figura 3.—ms. V, O.5.

١٣	٩	٢	٢٥	١٣
١٩	١٢	١٠	٣	٢١
٢٢	٢٠	١٨	٤	٤
٥	٢٣		١٤	٧
٨	١	٢٤	١٧	١٥

Figura 4.—ms. V, O.5, corregido

11	9	2	25	18
19	12	10	3	21
22	20	13	6	4
5	23	16	14	7
8	1	24	17	15

El cuadrado de orden 7 se inicia, en cambio, en la parte superior derecha del cuadrado y presenta un error ⁶⁷.

⁶⁵ Las cifras corregidas se indican en negrita.

⁶⁶ Dos de los cuales consisten en la confusión de 3 y 8 (ver nota 64). El otro error es un 2 en lugar del 1.

⁶⁷ Confusión entre 2 y 3.

Figura 5.—ms. V, O.7.

٢٢	١٩	٩	٧	٤٥	٤٢	٣٢
٣٣	٢٢	٢٠	١٠	٧	٤٧	٢٧
٣٧	٢٣	٢٤	٢١	١١	١	٤٧
٣٨	٣٨	٣٥	٢٥	١٥	١٢	٢
٣		٣٩	٢٩	٢٤	١٤	١٣
١٤	٤	٤٢	٤٠	٣٠	٢٧	١٧
١٨	٨	٥	٤٤	٤١	٣١	٢٨

Figura 6.—ms. V, O.7 corregido

22	19	9	6	45	42	32
33	23	20	10	7	46	36
37	34	24	21	11	1	47
48	38	35	25	15	12	2
3	49	39	29	26	16	13
14	4	43	40	30	27	17
18	8	5	44	41	31	28

El cuadrado de orden 9 se inicia en la tercera casilla de la penúltima fila empezando por la izquierda y también presenta un error ⁶⁸.

Figura 7.—ms. V, O.9

٣٧	٣٢	٢٠	١٤	٣		٧٧	٧٣	٥٠
٥١	٣٨	٣٤	٢٢	١٢	٣	٥١	٧٨	٥٥
٥٩	٥٢	٣٩	٣٥	٢٢	١٨	٥	٧٣	٧٩
٧٠	٥٧	٥٣	٤٠	٣٧	٢٣	١٠	٧	٧٤
٧٥	٧٢	٥٨	٥٤	٤١	٢٨	٢٥	١١	٧
٨	٧٦	٧٢	٥٩	٤٦	٤٢	٢٩	٢٥	١٢
٨٢	٩	٧٧	٧٤	٧٠	٤٧	٤٣	٣٠	٢٧
٢٧	١٤	١	٧٨	٩٥	٩١	٤٨	٤٤	٣١
٣٢	١٩	٢٥	٢	٧٩	٧٧	٧٢	٤٩	٤٥

⁶⁸ Confusión entre 5 y 8.

Figura 8.—ms. V, O.9, corregido

37	33	20	16	3	80	67	63	50
51	38	34	21	17	4	81	68	55
56	52	39	35	22	18	5	73	69
70	57	53	40	36	23	10	6	74
75	71	58	54	41	28	24	11	7
8	76	72	59	46	42	29	25	12
13	9	77	64	60	47	43	30	26
27	14	1	78	65	61	48	44	31
32	19	5	2	79	66	62	49	45

Cuadrados parmente pares de orden 4 y 8

El cuadrado de orden 4 es el único cuadrado de este manuscrito escrito en *abyād*. Por otra parte, además de estar testimoniado en los Ijwān al-Ṣafā' ⁶⁹ y en Abū l-Wafā' ⁷⁰, está construido mediante el método de puntuación, descrito a finales del X o inicios del XI por Ibn al-Hayṭam, según el autor anónimo del ms. Fatih 3439 (s. XII) ⁷¹, y en un tratado anónimo de inicios del siglo XI ⁷², además de por al-Jaraqī en el XII ⁷³ y Moschopoulos en el XIV ⁷⁴. Dicho método, conocido en el s. X y corriente en el XI, ha sido bien estudiado por los autores modernos ⁷⁵. Se trata de un tipo muy frecuente en los amuletos (es el

⁶⁹ Ed. Beirut, 109.

⁷⁰ Sesiano, "Le traité d'Abū l-Wafā'", 141 y 144 -145, figs. 1 y 5b.

⁷¹ Fols. 178r-182r. Ver Sesiano, "Herstellungsverfahren magischer Quadrate (I)", esp. 187, n.º 3 y 191-192 e *idem*, "Une compilation arabe du XII^e siècle sur quelques propriétés des nombres naturels", *Sciamvs*, 4 (2003), 137-189, esp. 144, figs. 10-11.

⁷² Sesiano, *Un traité médiéval*, esp. 40-43, figs. 16 y 17.

⁷³ *Idem*, "Herstellungsverfahren magischer Quadrate aus islamischer Zeit (III)", *Sudhoffs Archiv. Zeitschrift für Wissenschaftsgeschichte*, 79 (1995), 193-226, esp. 200, fig. 10.

⁷⁴ Tannery, P., "Le traité de Manuel Moschopoulos sur les carrés magiques", *Mémoires Scientifiques*, IV, Paris, 1920, 27-60. Trad. de J.C. McCoy en *Scripta Mathematica*, VIII, 1941, 15-26 y Sesiano, "Les carrés magiques de Manuel Moschopoulos", 385-389, figs. 9 y 13.

⁷⁵ Hermelink, "Die ältesten magischen Quadrate", 207; Cammann, S., "Islamic and Indian Magic Squares (I)", *History of Religions*, 8, 3 (1969), 181-209, 204; Sesiano,

mismo que aparece en el talismán del MAN ⁷⁶ y en el ms. B), que recogerán también en la Europa del siglo XVI, junto con el de orden 3, Cornelio *Agrrippa* ⁷⁷ y Girolamo Cardano, así como la tradición de los amuletos planetarios ⁷⁸.

Figura 9.—ms. V, O.4.

ا	ب	د	ه
ي	و	ز	ط
ح	ي	ا	ه
ب	ح	ب	ا

Figura 10.—ms. V, O.4.

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

El cuadrado de orden 8, en numeración indoarábica oriental, sigue el método, basado en la repetición del esquema del cuadrado de 4, descrito por el autor anónimo árabe del siglo XI ⁷⁹ y, más adelante, en el siglo XIV, por el bizantino Moschopoulos ⁸⁰. Posteriormente fue usado en el Renacimiento por *Agrippa*, Cardano y Paracelso, así como en la tradición de los amuletos planetarios ⁸¹. El cuadrado del ms. V de Azarquiel presenta siete errores ⁸².

“Herstellungsverfahren magischer Quadrate (I)”, 191-192, f. 4; *idem*, “Une compilation arabe”, 144-146, figs. 10-14, donde se muestra la forma de trasladar este sistema a los cuadrados de orden 8 y 12; *idem*, *Les carrés magiques dans les pays islamiques*, 42-45, esp. 44, figs. 62-64 e *idem*, “Quelques constructions des carrés”, 254-255, figs. 16-18.

⁷⁶ Rodríguez Lorente y Kind, “Un amuleto arábigo”, 401-405.

⁷⁷ Cf. Nowotny, “The Construction of Certain Seals”, 50, figs. 5-7.

⁷⁸ Ver al respecto, Folkerts, “Zur Frühgeschichte”, basado en W. Ahrens especialmente por lo que se refiere a los amuletos planetarios, 324-328, 4B. Cf. 338 para una bibliografía completa de Ahrens sobre el tema.

⁷⁹ Sesiano, *Un traité médiéval*, 40-43, fig. 17.

⁸⁰ Tannery, “Le traité de Manuel Moschopoulos”, 43-45, f. 10 y Sesiano, “Les carrés magiques de Manuel Moschopoulos”, 385-388, fig. 10.

⁸¹ Ver nota 78.

⁸² Aparte de la posible confusión de números concretos, el autor del ms. V o de su fuente parece haber querido corregir sus propios errores. Así, por ejemplo, en la columna derecha externa escribe 16 por 56 en la segunda fila y lo “corrige” en la fila séptima de la misma columna con un 56 en lugar del 16 que correspondería, asimismo, en la fila cuarta, después de haber escrito 39 por 29 en la cuarta columna lo “corrige” en la séptima con un 29 por 39. Por otra parte, junto a las confusiones entre 3 y 8 por lo que se refiere a las unidades (ver nota 64), confunde también en algunos casos 5 y 1 en las decenas, todo lo cual sugiere un original en *abyād*.

Figura 11.—ms. V, O.8.

1	38	09	0	6	92	43	1
69	10	16	04	11	11	10	14
61	23	22	66	60	19	18	21
32	33	30	34	28	38	29	20
60	24	27	27	34	30	31	01
12	67	64	20	21	63	62	26
9	00	06	12	13	01	00	06
46	2	3	41	40	4	7	07

Figura 12.—ms. V, O.8, corregido

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Cuadrado «imparmente» par de orden 6

El único cuadrado de este tipo de orden, también en numeración indoarábica oriental, está construido según el método descrito por J. Sesiano⁸³ que sigue un procedimiento parecido o inspirado en el del Anónimo del s. XI y el de al-Jaraqī (s. XII)⁸⁴ para el orden 4⁸⁵, pero adaptado a las diagonales del orden 6. Aparece en *al-Durr al-manẓūm* de al-Būnī⁸⁶. Fue descrito por ‘Alī Yazdī en el siglo XV⁸⁷ y, ya en Europa, lo encontramos en *Agrippa*⁸⁸, Cardano, Paracelso y en los amuletos planetarios⁸⁹. El del ms. V presenta dos errores⁹⁰.

Figura 13.—ms. V, O.6.

4	32	1	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
	5	33	4	2	31

Figura 14.—ms. V, O.6, corregido

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

⁸³ Sesiano, “Quelques constructions des carrés”, 255-256, figs. 25-26.

⁸⁴ *Idem*, “Herstellungsverfahren magischer Quadrate (III)”, 193-226, esp. 200, fig. 10.

⁸⁵ *Idem*, *Un traité médiéval*, 40-43, esp. 41, fig. 16.

⁸⁶ Cf. Hermelink, “Die ältesten magischen Quadrate”, 212.

⁸⁷ Sesiano, “Un traité persan”, 93-95, figs. 25-26.

⁸⁸ Cf. Nowotny, “The Construction of Certain Seals”, 51, figs. 11-13.

⁸⁹ Ver nota 78 y Sesiano, *Les carrés magiques dans les pays islamiques*, 90-91, figs. 139, 257-258 y 417-419.

⁹⁰ Los dos errores, que consisten en la confusión de 3 y 8 y repiten el error del cuadrado de orden 3 y dos de los tres del de orden 5, implican, como ya hemos comentado, una alta probabilidad de un original con numeración *abyad*.

Estudio de los cuadrados mágicos en el manuscrito B de Azarquiel

Los cuadrados que aparecen en este manuscrito, sobre todo los de órdenes superiores (6, 7, 8 y 9), contienen una proporción de errores mucho mayor que los del manuscrito V. El problema pudo residir en el hecho de manejar varias fuentes ⁹¹, probablemente más antiguas y con diversos tipos de numerales poco conocidos por el copista, por lo que o bien los copiaría o bien los transcribiría con mayor o menor fortuna.

Cuadrados impares de orden 3, 5, 7 y 9

El sistema de construcción de estos cuadrados, mediante el método del diamante ⁹² o cuadrado oblicuo ⁹³ (3, 5 y 9) está ya testimoniado en Ibn al-Hayṭam, según la fuente anónima del siglo XII anteriormente mencionada ⁹⁴. El método de las diagonales complementarias (7), por otro lado, estaría descrito como un caso particular de cuadrado de magia simple de orden impar en un ms. anónimo del s. XI ⁹⁵, como ya hemos comentado.

Por lo que se refiere al cuadrado de orden 3, resulta interesante constatar que, igual que el de orden 4, presenta doble notación numérica en cada casilla, indoarábica oriental y *abýad*, aunque no siempre en el mismo orden. Parece que presenta un error ⁹⁶.

⁹¹ Posiblemente los cuadrados estén basados en más de una fuente, a juzgar por la doble notación en los de orden 3 y 4 y las numeraciones mixtas y múltiples errores que aparecen en los cuadrados de los órdenes superiores.

⁹² Cammann, "Islamic and Indian (I)", 197, figs. 4c-d.

⁹³ Sesiano, "Quelques constructions des carrés", 251-262, esp. 253-254, figs. 6-8; *idem*, "Quelques méthodes arabes de construction", 58-59, e *idem*, "Une compilation arabe", 141-143, figs. 4-9.

⁹⁴ Ms. Fatih 3439, f. 178r-182r. Ver Sesiano, "Herstellungsverfahren magischer Quadrate (I)", 187, n.º 3 y 191-192 e *idem*, "Une compilation arabe", 141-143, figs. 4-9.

⁹⁵ Sesiano, *Les carrés magiques dans les pays islamiques*, 29-30.

⁹⁶ El 8, en numeración indoarábica oriental, quizás defectuoso en el original, parece haberse interpretado como un 1.

Figura 15.—ms. B, O.3.

٤٢	٩	٣٤
٣٤	٩	٧٣
١٢	١١	٦٩

Figura 16.—ms. B, O.3 corregido

4	9	2
3	5	7
8	1	6

El cuadrado de orden 5, a diferencia del cuadrado del ms. V, está en *abyad*. Este cuadrado está documentado en Ibn al-Hayṭam, según la fuente anónima del XII⁹⁷, así como en un ms. anónimo del siglo XI⁹⁸, en Moschopoulos (s. XIV)⁹⁹, *Agrippa* y los amuletos planetarios¹⁰⁰ y en al-Fullānī al-Kiṣnāwī (s. XVIII)¹⁰¹. El cuadrado del manuscrito B de Azarquiel presenta dos errores¹⁰².

Figura 17.—ms. B, O.5

١٢	٩	٣٤	٧٣	٤٢
٣٤	٩	٧٣	٤٢	١٢
١٢	٩	٣٤	٧٣	٤٢
٣٤	٩	٧٣	٤٢	١٢
١٢	٩	٣٤	٧٣	٤٢

Figura 18.—ms. B, O.5, corregido

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

⁹⁷ Sesiano, *Les carrés magiques dans les pays islamiques*, 23-29, esp. 26, figs. 34, 256 y 415; *idem*, “Herstellungsverfahren magischer Quadrate aus islamischer Zeit (II)”, *Sudhoffs Archiv. Zeitschrift für Wissenschaftsgeschichte*, 64 (1980), 187-196, esp. 190, figs. 1-2 e *idem*, “Quelques méthodes arabes de construction”, 58-59.

⁹⁸ *Idem*, *Un traité médiéval*, 32-35, esp. 33, fig. 17.

⁹⁹ *Idem*, “Les carrés magiques de Manuel Moschopoulos”, 382.

¹⁰⁰ Ver nota 78.

¹⁰¹ Basado esencialmente en al-Šabrāmaliṣī, c. 1600. Ver Sesiano, “Quelques méthodes arabes de construction”, 54.

¹⁰² Confusión de 8 por 3 (en la casilla central), uno de los errores más habituales en la transcripción de notación alfanumérica *abyad*, y repetición de un número por error (el 19 en su casilla y en la que correspondería al 23) también frecuente.

El cuadrado de orden 7, en numeración indoarábica oriental y construido con el método de las diagonales complementarias, es igual al de orden 7 del ms. V, pero presenta nueve errores ¹⁰³.

Figura 19.—ms. B, O.7.

Figura 20.—ms. B, O.7, corregido

22	19	9	6	45	42	32
33	23	20	10	7	46	36
37	34	24	21	11	1	47
48	38	35	25	15	12	2
3	49	39	29	26	16	13
14	4	43	40	30	27	17
18	8	5	44	41	31	28

El cuadrado de orden 9, escrito en notación alfanumérica *abyād*, está testimoniado ya en el manuscrito anónimo del s. XI ¹⁰⁴ y en Moschopoulos ¹⁰⁵. También se corresponde con los de Paolo dell'Abaco, *Agrippa*, Cardano, Paracelso y la tradición de los amuletos planetarios ¹⁰⁶. Es el único de las dos series (V y B) que coincide con el ms. latino Viena 5239 ¹⁰⁷. Presenta 21 errores ¹⁰⁸.

Sesiano ¹⁰⁹ ofrece un ejemplo para los cuadrados mágicos contruidos por medio del movimiento del salto de caballo del ajedrez en el que las filas coinciden con éste de Azarquiel, aunque distribuidas en un orden distinto.

¹⁰³ Confusión entre los números 4 y 3 en la primera casilla de la segunda fila y en la tercera casilla de las filas quinta y sexta; la quinta fila presenta además 6 por 9 y 3 por 2 y en la séptima hay cuatro errores sobre siete: 9 por 4; 1 por 2; 50 por 5 y en la segunda casilla un injustificable 27 por 8.

¹⁰⁴ Sesiano, *Un traité médiéval*, 34-35, n.º 61, fig. 8.

¹⁰⁵ *Idem*, "Les carrés magiques de Manuel Moschopoulos", 382.

¹⁰⁶ Ver nota 78.

¹⁰⁷ Texto transcrito y traducido por Sesiano, "Magic Squares for Daily Life", 715-734.

¹⁰⁸ Los cuadrados de orden 9 y 8 presentan un cúmulo de errores injustificables que resulta inútil detallar. Algunos responden a una cierta lógica, como la repetición de un número o la continuación de una serie a partir de un número erróneo y otros parecen tener un origen paleográfico.

¹⁰⁹ Sesiano, "Construction of Magic Squares".

Figura 21.—ms. B, O.9.

Figura 22.—ms. B, O.9 corregido

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

Cuadrados «parmente» pares de orden 4 y 8

El cuadrado de orden 4 presenta, como el de orden 3, doble numeración en cada casilla, indoarábica oriental y *abýad*, no siempre en el mismo orden.

Figura 23.—ms. B, O.4.

دع	١٤	١٥	١١
ع	١٤	١٥	١١
١٤	١٥	١١	١١
١٤	١٥	١١	١١

Figura 24.—ms. B, O.4. Transcrito

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

El cuadrado de orden 8 presenta únicamente numeración indoarábica oriental. Se trata de un cuadrado pandiagonal, descrito ya en la fuente anónima del s. XI¹¹⁰ que no menciona, sin embargo, esta importante característica, y presenta 15 errores¹¹¹.

¹¹⁰ Sesiano, *Un traité médiéval*, 44-45.

¹¹¹ Como se ha visto en el cuadrado de orden 9 de este mismo manuscrito, la multiplicidad de errores, la mayoría de ellos sin justificación paleográfica, hace inútil su enumeración. Citaremos el error, ya encontrado en el cuadrado de 7, de escribir 50 por 5, lo que produce una repetición en la penúltima fila del 50 de la primera y la confusión no infrecuente entre 2 y 3 ó 7 y 8, aparte de la confusión entre 3 y 8, error que sugiere como ya hemos comentado (ver nota 64) un original en *abýad*.

Figura 25.—ms. B, O.8.

52	45	24	9	50	47	22	11
29	4	57	40	31	2	59	38
41	56	12	20	43	54	15	18
8	25	36	61	6	27	34	63
60	37	32	1	58	39	30	3
21	12	49	48	23	10	51	46
33	64	5	28	35	62	7	26
16	17	44	53	14	19	42	55

Figura 26.—ms. B, O.8 corregido

52	45	24	9	50	47	22	11
29	4	57	40	31	2	59	38
41	56	12	20	43	54	15	18
8	25	36	61	6	27	34	63
60	37	32	1	58	39	30	3
21	12	49	48	23	10	51	46
33	64	5	28	35	62	7	26
16	17	44	53	14	19	42	55

Cuadrado «imparmente» par de orden 6

Este cuadrado está escrito en *abýad* y plagado de errores. El método de construcción podría corresponderse *mutatis mutandis* con el usado en el ms. V. Sin embargo, hay que decir que los cuadrados de orden 6 no parecen haber gozado de un método sistemático de cons-

trucción hasta finales del siglo XI ¹¹² o inicios del XII ¹¹³. De hecho, los cuadrados imparmente pares fueron los más difíciles de sistematizar, puesto que no admiten la aplicación de los métodos que funcionan sin problema en los otros casos (impares y parmente pares) ¹¹⁴. Concretamente este cuadrado del ms. B es un cuadrado extremadamente corrupto, por lo que carece de sentido la corrección de los errores.

Figura 27.—ms. B, O.6.

Figura 28.—ms. B, O.6. Transcrito

6	30	3	33	16	1
5	28	9	14	24	12
11	27	29	15	22	35
32	10	21	23	31	34
25	8	20	4	17	35
26	7	19	18	2	36

Conclusiones sobre los cuadrados de Azarquiel

En general, podemos decir que los métodos de construcción de los cuadrados que aparecen en los manuscritos de Azarquiel que nos ocupan son bastante sistemáticos:

Los cuadrados de orden impar (3, 5, 7 y 9) están contruidos, esencialmente, con el método de las diagonales complementarias (especialmente en el ms. V) o con el método del diamante o cuadrado oblicuo (en general en el ms. B), que produce un cuadrado mágico similar al del método anterior.

Los de orden parmente par (4 y 8) se completaron, excepto el pandiagonal de orden de 8 del ms. B, con el método de puntuación, creado en principio para el cuadrado de orden 4 pero que se adaptó con facilidad a los otros cuadrados parmente pares, en este caso el de orden 8 de V.

¹¹² Sesiano, "Quelques constructions des carrés", 252.

¹¹³ *Idem*, "Herstellungsverfahren magischer Quadrate (III)", 193-226, e *idem*, *Un traité médiéval*, 9.

¹¹⁴ Savage, "Oddly-Even Magic Squares", 217.

El cuadrado de orden imparmente par (6) de los manuscritos que nos ocupan, especialmente el V, se basa en una adaptación de dicho método ¹¹⁵. En el ms. B, cuajado de errores, parecen subyacer las vacilaciones propias de un método en vías de generalización en época de Azarquiel, aparte de los errores de copia.

Aunque Europa habría recibido, según los estudiosos ¹¹⁶, dos series de cuadrados de orden 3 a 9 de origen árabe, ninguna de ellas en su conjunto es exactamente igual a las que encontramos en los mss. de Azarquiel que nos ocupan, si bien la mayoría de estos cuadrados o, al menos, otros contruidos con los mismos métodos sí se encuentran en parte de la tradición renacentista: *Agrippa*, Cardano y algunos de los amuletos planetarios.

En cambio, algunos cuadrados, básicamente los de orden 5 y 9, entre los impares, el pandiagonal de 8 y los imparmente pares, presentan un método de construcción diferente en las obras de Pacioli, Paracelso y el resto de los amuletos planetarios.

Por otra parte, los cuadrados de orden 3 (aunque poco representativos como ya hemos comentado) y 7 de Azarquiel (B y V) son dextrorsos a diferencia de los de Pacioli, Paracelso y los amuletos planetarios que son, en general, sinistrorsos.

Curiosamente, los cuadrados de orden impar de los manuscritos de Azarquiel V y B son todos dextrorsos, mientras que los de orden parmente par e imparmente par son sinistrorsos, a excepción del cuadrado pandiagonal de orden 8 del ms. B.

Todo ello nos habla de más de una fuente, no tanto en el ms. V, que es más regular, aunque muestra un cuadrado en notación alfanumérica *abÿad*, sino especialmente por lo que se refiere al ms. B, que presenta además la coexistencia de diversas grafías en un mismo cuadrado y en los diferentes cuadrados y multitud de errores. Además el cuadrado de orden 7 de B (8 errores) es igual al de V (1 error). V podría, pues, haber sido uno de las fuentes indirectas de B, a pesar de que entre los 8 errores del ms. B no figura el único error del V.

Por otra parte, Azarquiel no tiene ningún cuadrado con bordes ni ninguno que se corresponda con un sistema de construcción de este

¹¹⁵ Para una descripción del método usado en el cuadrado de 6V cf. Nowotny, "The Construction of Certain Seals", 51 y Sesiano, "Un traité persan", 93-95, figs. 25-26.

¹¹⁶ W. Ahrens, S. Cammann, H.S. Schuster, H. von Hermelink, M. Folkerts y J. Sesiano, entre los más importantes.

tipo, uno de los más antiguos en el mundo musulmán (*Quadratus Mirabilis*), según Sesiano¹¹⁷. Este sistema, descrito por Ibrāhīm al-Zinjānī (s. XIII)¹¹⁸ se encontraba, al parecer, ya en embrión en Abū l-Wafā al-Būzjānī (940-997/998)¹¹⁹, y fue desarrollado por ‘Alī b. Ahmad al-Anṭākī (m. 987)¹²⁰.

Los métodos generales para los cuadrados de magia simple, como los de los manuscritos de Azarquiel, aunque fáciles de memorizar y aplicar son posteriores al descubrimiento de los métodos de construcción de cuadrados con bordes, puesto que los primeros requieren consideraciones globales y una reflexión teórica mucho más elaborada que la de la construcción de un «borde» aislado¹²¹. De hecho, el método de construcción que da lugar a los parámetros concretos de los cuadrados de orden 3, 4, 6 y 8 del ms. V y los de orden 5, 9, y probablemente 6, del ms. B está descrito en el tratado anónimo del siglo XI traducido por Sesiano¹²². Además, en el ms. B encontramos excepcionalmente un cuadrado pandiagonal (orden 8), construcción conocida ya en el siglo X pero cuyo método general de construcción no se desarrolló hasta el siglo XI.

Todo ello nos lleva a considerar la posibilidad de que la estructura de los cuadrados en estos manuscritos, en general sistemática respecto al método de construcción, sea contemporánea de Azarquiel.

Finalmente, respecto a la grafía de los números en ambos manuscritos, cabe destacar que las cifras en numeración indoarábiga oriental de los cuadrados del ms. V son bastante regulares¹²³ y de forma más moderna que los del B¹²⁴. En cambio, en el ms. B encontramos múlti-

¹¹⁷ Sesiano, “Un traité persan”, 80, e *idem*, *Les carrés magiques dans les pays islamiques*, 124-125.

¹¹⁸ Ms. Feyzullah, Ef.1362. Ver Sesiano, “Herstellungsverfahren magischer Quadrate (II)”, 251, n.º 1.

¹¹⁹ Sesiano, “Le traité d’Abū l-Wafā”, 121-244.

¹²⁰ *Idem*, “Quadratus Mirabilis”, en J.P. Hogendijk y A.I. Sabra (eds.), *The enterprise of Science in Islam. New Perspectives*, Cambridge Mass., 2003, 199-233.

¹²¹ *Idem*, “Le traité d’Abū l-Wafā”, 193, n.º 4.

¹²² *Idem*, *Les carrés magiques dans les pays islamiques*, 29-30, figs. 39-40.

¹²³ Salvo ciertas vacilaciones en el cuadrado de orden ocho, como el 9 del 39 (por 29), que parece corresponder en realidad a un 8 corregido (fig. 11). Por otro lado, la diferencia entre el 3 y el 2 está a veces poco marcada, lo cual podría explicar algunos errores como el de las casillas 43 y 36 del cuadrado de orden siete.

¹²⁴ Ver, por ejemplo, Kunitzsch, *Zur Geschichte*, esp. el cuadro de la página 39 y Burnett, “Indian Numerals”, esp. las tablas de las páginas 265-268.

ples vacilaciones: por ejemplo, los cuadrados de orden 3 y 4 presentan en todas las casillas doble numeración, indoarábiga oriental y *abýad*, pero no siempre en este orden ¹²⁵ y en otros cuadrados coexisten cifras más antiguas con otras de grafía moderna ¹²⁶.

Recibido: 11/03/2008

Aceptado: 05/06/2008